Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 19 de junho de 2019

2.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Justifique devidamente as suas respostas. **O formulário encontra-se no verso.**

---

1. [**30**] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 3 + xy$.
Determine os extremos absolutos de f na circunferência
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}.$$

2. [**55**] Resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:
   (a) $yy'\sqrt{2 + 3x^2} = x$;
   (b) $y' + \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)y = e^{-2x}$;
   (c) $y \cos x + 2xe^y + (x^2e^y - 1 + \operatorname{sen} x)\, y' = 0$.

3. [**70**] Considere o seguinte problema de valores iniciais:
$$y'' - 6y' + 9y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$
   (a) Resolva-o usando transformadas de Laplace.
   (b) Determine a solução do mesmo problema começando por resolver a respetiva equação pelo método dos coeficientes indeterminados.

4. [**15**] Calcule a transformada inversa de Laplace da função
$$F(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4)}\, e^{-s}.$$

5. [**30**] Considere a equação diferencial
$$y' = f(ax + by + c)\,, \tag{1}$$
onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, e f é uma dada função contínua num certo intervalo I.
   (a) Mostre que a substituição de variável $z = ax + by + c$ converte a equação (1) numa equação de variáveis separáveis.
   (b) Resolva a equação diferencial
$$y' = (x + y + 1)^2.$$

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

função	transformada
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$